Conséquence d'OCA sur les plongements de l'algèbre de mesure dans $\mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{fin}$

Vincent Nesme

23 janvier 2006

Mémoire de D.E.A.
réalisé sous la direction de Boban Veličković

d'après un article d'Alan Dow et Klaas Pieter Hart([5])

L'open colouring axiom (OCA), introduit récemment dans l'étude des énoncés combinatoires indécidables, est intéressant à plus d'un titre. C'est en effet une conséquence du proper forcing axiom (PFA), qui est un axiome très puissant ; il est cependant prouvablement consistant, contrairement à son ancêtre pour lequel ce résultat nécessite le recours des axiomes de grands cardinaux. Ceci peut être vu comme un avantage, ou pas, mais de toute manière cela prouve que OCA est strictement plus faible que PFA. Il faut de plus signaler une singularité d'OCA : il fait « ouvertement » référence à la topologie dans son énoncé, ce qui le distingue de la plupart des autres axiomes étudiés dans le même cadre. Il semble finalement qu'avec tout cela OCA soit un axiome suffisamment puissant pour décider un bon nombre d'énoncés combinatoires. Cet exposé reprend la preuve de MM. Dow et Hart que, sous OCA, il n'existe pas de plongement de l'algèbre de mesure dans $\mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{fin}$.

Si f est une fonction de X dans Y, on note On note $f^{\rightarrow}(A) = \{f(x)/x \in A\}$ et $f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X/f(x) \in B\}$. Pour tout ensemble A et tout entier n, on note $[A]^n$ l'ensemble des parties de A à n éléments.

Par « ensemble de réels » on désigne un espace métrique séparable.

1 Présentation de OCA

Définition 1 (OCA) *Si S est un ensemble de réels et $[S]^2 = K_0 \cup K_1$ est une partition telle que K_0 soit ouvert pour la topologie produit, alors soit il existe une partie de S 0-homogène non dénombrable, soit S est réunion d'un nombre dénombrable de parties 1-homogènes (où une partie A est dite i-homogène si $[A]^2 \subseteq K_i$).*

Théorème 1 *Soit S un ensemble de réels et $[S]^2 = K_0 \cup K_1$ une partition telle que K_0 soit ouvert pour la topologie produit. Supposons que S ne soit par l'union de $< 2^{\aleph_0}$ parties 1-homogènes. Alors il existe $Y \subseteq S$ de taille $2^{\aleph_0}$ tel que le p.o. des parties finies de Y 0-homogènes, ordonné à l'inverse de l'inclusion, satisfasse la $2^{\aleph_0}$-c.c.*

Démonstration : Pour $p \in S^n$, on note $W_p = \{q \in S^n / \forall i < n \ \{p_i, q_i\} \in K_0\}$. Pour f une fonction de $A \subseteq S^n$ dans S et $p \in S^n$, on note $\omega_f(p)$ l'oscillation de f sur W_p au voisinage de p, c'est-à-dire

$$\omega_f(p) = \bigcap \left\{ \overline{f^{\rightarrow}(W_p \cap A \cap U)} / U \subseteq S^n,\ U \text{ ouvert et } p \in U \right\}$$

Soit $\left\{f_\xi / \xi < 2^{\aleph_0}\right\}$ une énumération des fonctions dénombrables de S^n dans S, pour $n < \omega$, et $\left\{T_\xi / \xi < 2^{\aleph_0}\right\}$ une énumération des parties fermées 1-homogènes de S. On définit alors par induction une suite $(x_\xi)_{\xi < 2^{\aleph_0}}$ d'éléments de S vérifiant, pour $\alpha < 2^{\aleph_0}$,

1. $\forall \xi < \alpha \ x_\alpha \neq x_\xi$ (autrement dit, les x_ξ sont deux à deux disjoints).
2. $\forall \xi < \alpha \ x_\alpha \notin T_\xi$.
3. x_α n'appartient à aucun ensemble 1-homogène de la forme $\omega_f(p) \cap S$, où $\xi < \alpha$ et p est une suite finie d'éléments de $\{x_\xi / \xi < \alpha\}$.

Tout d'abord, une telle suite existe bien ; en effet, on peut toujours trouver un x_α vérifiant les trois conditions, car, par hypothèse, S n'est pas l'union des $\{x_\xi\}$, des T_ξ et des $\omega_f(p) \cap S$ 1-homogènes, pour $\xi < \alpha$ et p une suite finie d'éléments de $\{x_\xi / \xi < \alpha\}$. On pose alors $Y = \left\{x_\alpha / \alpha < 2^{\aleph_0}\right\}$. Montrons que Y convient. Soir $\mathcal{F}$ une famille disjointe de $2^{\aleph_0}$ parties 0-homogènes de Y. On peut, par cardinalité, supposer que tous les éléments de $\mathcal{F}$ ont le même cardinal $n \geq 1$. On montre alors par récurrence sur n qu'il existe deux éléments de $\mathcal{F}$ dont l'union est 0-homogène.

Pour le cas $n = 1$, procédons par l'absurde. Supposons que $Z = \bigcup \mathcal{F}$ soit 1-homogène. Alors $\overline{Z}(\cap S)$ est aussi 1-homogène, puisque K_0 est ouvert. Il existe donc $\xi < 2^{\aleph_0}$ tel que $\overline{Z} = T_\xi$; mais alors $\forall \alpha > \xi \ x_\alpha \notin Z$, ce qui est contradictoire puisque $|Z| = 2^{\aleph_0}$. Donc Z n'est pas 1-homogène, ce qui signifie bien qu'il existe deux éléments de $\mathcal{F}$ dont l'union est 0-homogène.

Supposons $n > 1$. Pour $s \in \mathcal{F}$ on note $s = \left\{x_{s(0)}, \ldots, x_{s(n-1)}\right\}$, avec $s(0) < \ldots < s(n-1) < 2^{\aleph_0}$. Ainsi à s on associe l'élément $\left(x_{s(0)}, \ldots, x_{s(n-1)}\right)$ de S^n. On peut alors supposer qu'en ce sens il existe un ouvert de base U de S^n séparant chaque élément de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $U = \Pi_{i=0}^{n-1} U_i$, avec les U_i deux à deux dijoints et $\forall s \in \mathcal{F} \ \forall i < n \ x_{s(i)} \in U_i$. En effet, ces ouverts de base sont en nombre dénombrable et recouvrent $[S]^n$, donc il en existe un qui contient un nombre non dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$.

On note g la fonction qui, pour $s \in \mathcal{F}$, associe $x_{s(n-1)}$ à s_{n-1}, et on pose $\mathcal{F}_0 = \left\{s \in \mathcal{F} / x_{s(n-1)} \in \omega_g\left(s|_{n-1}\right)\right\}$.

Montrons que $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0| < 2^{\aleph_0}$. On choisit pour chaque $s \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$ un intervalle I^s, ouvert de base de S, contenant $x_{s(n-1)}$ et disjoint de $\omega_g\left(s|_{n-1}\right)$ (I_s existe car $\omega_g\left(s|_{n-1}\right)$ est un fermé de S). Si $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0| = 2^{\aleph_0}$, il existe alors, toujours pour chaque $s \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$, un ouvert U^s de S^{n-1}, que l'on choisira de base, contenant $s|_{n-1}$ et tel que pour tout q dans $U^s \cap W_{s|_{n-1}}$, $g(q)$ ne soit pas dans I^s. Il existe une partie Z de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$ de cardinal $2^{\aleph_0}$ telle que tous les I^s, pour $s \in Z$, soient égaux à un certain I, et que tous les U^s, pour $s \in Z$, soient égaux à un certain U (puisque les ouverts de base sont en nombre dénombrable). Par hypothèse de récurrence, il existe $s, t \in Z$ tels que $s|_{n-1} \cup t|_{n-1}$ soit 0-homogène. Mais alors $t|_{n-1} \in U \cap W_{s|_{n-1}}$ et $g\left(t|_{n-1}\right) \in I$, ce qui est absurde.

Soit g_0 une sous-fonction dense dénombrable de g, et $\xi < 2^{\aleph_0}$ tel que $g_0 = f_\xi$. Soit $s \in \mathcal{F}_0$ ayant tous ses indices supérieurs à ξ et aux indices des éléments de g_0 (puisque $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0| < 2^{\aleph_0}$, $|\mathcal{F}_0| = 2^{\aleph_0}$, donc un tel s existe). Comme g_0 est dense dans g, pour tout $p \in S^{n-1}$, $\omega_g(p) = \omega_{g_0}(p)$. Donc $x_{s(n-1)} \in \omega_{f_\xi}(s|_{n-1})$. Par construction, on en déduit que $\omega_{f_\xi}(s|_{n-1})$ n'est pas 1-homogène. Soit $u, v \in \omega_{f_\xi}(s|_{n-1})$ tels que $\{u, v\} \in K_0$ et I, J deux intervalles ouverts de S tels que $u \in I$, $v \in J$ et $I \times J \subseteq K_0$. Par définition de $\omega_{g_0}(s_{n-1})$, il existe $p \in \mathrm{dom}(g_0)$ tel que $p \cup s|_{n-1}$ soit 0-homogène et que $g_0(p) \in I$. Soit $V \subseteq S^{n-1}$ un ouvert tel que $s|_{n-1} \in V$ et que pour tout $q \in V$, $p \cup q$ soit 0-homogène. Soit $q \in V$ tel que $g_0(q) \in J$. Alors $p \cup \{g_0(p)\}$ et $q \cup \{g_0(q)\}$ sont deux membres de $\mathcal{F}$ dont l'union est 0-homogène.

$\square$

Quelques rappels brefs : PFA stipule que pour tout p.o. propre $\mathbb{P}$ et toute famille $\mathfrak{D}$ de cardinal $\aleph_1$ de parties denses de $\mathbb{P}$, il existe une filtre $\mathfrak{D}$-générique ; les p.o. vérifiant la c.a.d ou σ-clos sont propres ; si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont des p.o. propres, alors $\mathbb{P} * \mathbb{Q}$ l'est aussi.

Théorème 2 *PFA $\Rightarrow$ OCA.*

Démonstration : Soit S un ensemble de réels et $[S]^2 = K_0 \cup K_1$ une partition telle que K_0 soit ouvert pour la topologie produit ; supposons que S ne soit pas réunion d'un nombre dénombrable de parties 1-homogènes. Soit $\mathbb{P}$ le p.o. des injections dénombrables de $\aleph_1$ dans $2^{\aleph_0}$. $\mathbb{P}$ est σ-clos et $\mathbb{1} \Vdash_{\mathbb{P}}$ CH. Plaçons-nous dans une extension générique engendrée par $\mathbb{P}$. D'après le théorème précédent, il existe $Y \subseteq S$ non dénombrable tel que le p.o. $\mathbb{Q}$ des parties 0-homogènes de Y, ordonné par l'inverse de l'inclusions, vérifie la c.a.d. ; de plus, $\aleph_1$ parties denses de $\mathbb{Q}$, ensemble, permettent de forcer que l'ensemble générique homogène soit non dénombrable.

Tout cela est donc forcé par un élément de $\mathbb{P}$. $\mathbb{P} * \mathbb{Q}$ étant un p.o. propre, d'après PFA, en forçant par $\mathbb{P} * \mathbb{Q}$, on peut produire l'ensemble recherché.

$\square$

Définition 2 *On note $\mathfrak{b}$ le plus petit cardinal d'une sous-partie de ω^ω cofinale au sens de $<^*$.*

Théorème 3 (OCA) *$\mathfrak{b} \geq \aleph_2$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega$ de taille $\aleph_1$. On peut supposer que toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ sont strictement croissantes et que $\mathcal{F}$ est bien ordonné par $\leq^*$, de type d'ordre ω_1. On note donc $\mathcal{F} = \{f_\alpha / \alpha < \omega_1\}$, avec $\forall \alpha < \beta \; f_\alpha <^* f_\beta$. On note $<$ la relation définie sur ${}^\omega\omega$ par $f < g \iff \forall x \in \omega \; f(x) < g(x)$. Soit $K_1 = \{\{f, g\} \in \mathcal{F} / f < g \vee g < f\}$ et $K_0 = [\mathcal{F}]^2 \setminus K_1$. Il est facile de voir que K_0 est un ouvert de $[\mathcal{F}]^2$. En effet, si f et g sont incomparables pour $<$, il existe $n, p < \omega$ tels que $f(n) \leq g(n)$ et $f(p) \geq g(p)$; alors $\big\{\{f', g'\} \in [\mathcal{F}]^2 / f'(n) \leq g'(n) \wedge f'(r) \geq g'(r)\big\}$ est un voisinage de $\{f, g\}$ dans $[\mathcal{F}]^2$ inclus dans K_0. Il n'existe pas de chaîne non dénombrable pour $<$, donc $\mathcal{F}$ ne peut pas s'écrire comme la réunion d'une famille dénombrable de parties 1-homogènes. D'après OCA, il existe donc, pour l'orde $<$, une antichaîne de $\mathcal{F}$ non dénombrable ; on pourra donc supposer que $\mathcal{F}$ elle-même est une antichaîne pour $<$.

Par contraposée, supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas majorée. On peut de plus supposer qu'il existe $p < \omega$ tel que

1. $\forall n < p \, |\{f(n) / f \in \mathcal{F}\}| = 1$,
2. $|\{f(p) / f \in \mathcal{F}\}| = \aleph_0$ et
3. pour tout $n < \omega$, $|\{f \in \mathcal{F} / f(p) = n\}|$ est égal à 0 ou $\aleph_1$.

(sinon $\mathcal{F}$ serait bornée)

Soit $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une partie dénombrable dense dans $\mathcal{F}$. Soit $\eta < \omega_1$ tel que $\forall g \in \mathcal{G} \; g <^* f_\eta$. Soit $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ de cardinal $\aleph_1$, vérifiant $|\{f(p) / f \in \mathcal{F}'\}| = \aleph_0$, et $l < \omega$ tels que $\forall f \in \mathcal{F}' \; \forall n \geq l \; f_\eta(n) \leq f(n)$. On choisit $g \in \mathcal{G}$ et $q < \omega$ tel que $q > m$ et $\forall n \geq q \; g(n) < f_\eta(n)$. Soit enfin $h \in \mathcal{F}'$ tel que $h(p) > f_\eta(q)$. Alors $h >= g$; pourtant $h \neq g$. Donc f n'est pas une antichaîne de $<$ (CQFD).

$\square$

2 Notations

Pour $x \subseteq \omega$, on note $[x]$ la classe de x dans $\mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$; autrement dit $[x] = \{y \subseteq \omega / |x \Delta y| < \omega\}$.

Définition 3 *On dit qu'une famille presque disjointe $\mathcal{A}$ de parties infinies de ω est* nette *s'il existe une fonction injective $e : \omega \to 2^{<\omega}$ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\bigcup e^{\to}(A)$ soit contenu dans une branche x_A de $2^{<\omega}$, de telle manière que $(A \mapsto x_A)$ soit injective. On dit naturellement d'une telle fonction e qu'elle* témoigne *de la netteté de $\mathcal{A}$.*

Définition 4 *Soit $\mathcal{J}$ un idéal sur ω. $\mathcal{J}$ est un* P_κ-idéal *si pour toute partie $\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J}$ de cardinal $\leq \kappa$ il existe $J \in \mathcal{J}$ tel que $\forall I \in \mathcal{J}'\ I \subseteq^* J$.*

Définition 5 *L'*algèbre de mesure *est le quotient de la σ-algèbre des boréliens de $[0;1]$ par le σ-idéal des parties de mesure nulle.*

Le but est de démontrer ceci :

Théorème 4 (OCA) *L'algèbre de mesure ne se plonge pas dans $\mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$.*

Soit $\mathbb{C} = \omega \times 2^\omega$. Pour $s \in 2^{<\omega}$, on note $[s] = \{t \in 2^\omega / s \subseteq t\}$. $\{[s]/s \in 2^{<\omega}\}$ est une base d'ouverts de 2^ω. ω est muni de la topologie discrète et $\mathbb{C}$ de la topologie produit. On définit une mesure μ sur l'ensemble $\mathrm{Bor}(\mathbb{C})$ des parties parties boréliennes de $\mathbb{C}$ par $\mu(\{n\} \times [s]) = 2^{-|s|}$. L'algèbre de mesure est alors isomorphe à $\mathbb{M} = Bor(\mathbb{C})/\mathcal{N}$, où $\mathcal{N} = \{N \subseteq \mathbb{C}/\mu(N) = 0\}$, puisqu'il existe une bijection borélienne entre $[0;1]$ et $\mathbb{C}$.

Définition 6 *Soit $\varphi : \mathbb{M} \to \mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ un plongement d'algèbres booléennes. Une application $\psi : \mathbb{M} \to \mathfrak{P}(\omega)$ est un* lifting *de φ si, pour tout $a \in \mathbb{M}$, $\psi(a)$ est un représentant de $\varphi(a)$.*

Soit $\mathcal{B} = \{\{n\} \times [s]/n < \omega \wedge s \in 2^{<\omega}\}$; $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $\mathbb{C}$. On identifie naturellement $\mathcal{B}$ à $B = \omega \times 2^{<\omega}$.

Pour $f \in {}^\omega\omega$ on note $B_f = \left\{(n,s) \in B / s \in 2^{f(n)}\right\}$. Pourquoi stratifier ainsi B ? Parce que l'on veut parler d'ouverts-fermés ; voyons cela.

Définition 7 *Pour $O \subseteq B$, on note $\overline{O} = \bigcup\{\{n\} \times [s]/(n,s) \in O\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Alors, s'il existe $f \in {}^\omega\omega$ tel que $O \subseteq B_f$, $\overline{O}$, non content d'être ouvert, est également fermé. Réciproquement (et par compacité), si A est un ouvert-fermé de $\mathbb{C}$, alors il existe $f \in {}^\omega\omega$ et $O \subseteq B_f$ tels que $A = \overline{O}$. Il ne faut donc pas se laisser impressionner par les notations, et bien comprendre que le fait d'introduire des stratifications avec ces fonctions f, est fait uniquement dans le but de se restreindre aux ouverts-fermés.

Définition 8 *Si $O \subseteq B$, on note $\psi[O] = \bigcup\{\psi(\{n\} \times [s])/(n,s) \in O\}$.*

(Nous avons déjà introduit une abréviation pour $\{n\} \times [s]$, à savoir $\overline{\{(n,s)\}}$, mais comme on peut le constater elle est moins claire que l'original, alors...)

Pour $A, B \in \mathfrak{P}(\omega)$, on notera $[A]$ la classe de A dans $\mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$, $A =^* B$ pour $[A] =^* [B]$ et $A \subseteq^* B$ pour $[A] \subseteq [B]$.

Lemme 1 *Si O est une partie finie de B, alors $\psi(\overline{O}) =^* \psi[O]$.*

Démonstration : $\psi(\{n\} \times [s])$ est par définition un représentant de $\varphi(\{n\} \times [s])$. Comme O est fini, $\psi[O]$ est donc un représentant de $\varphi(\overline{O})$, comme $\psi(\overline{O})$.

□

Définition 9 *Soit ψ un lifting.*

1. *On dit que ψ est* complet *si pour tout $f \in {}^\omega\omega$ et tout $O \subseteq B_f$, $\psi\left(\overline{O}\right) =^* \psi[O]$.*
2. *On dit que ψ est* exact *si $(\psi(\{n\} \times [\emptyset]))_{n<\omega}$ est une partition de ω et, pour tout $n < \omega$ et tout $s \in 2^{<\omega}$, $\psi(\{n\} \times [s])$ est l'union disjointe de $\psi(\{n\} \times [s^\frown 0])$ et de $\psi(\{n\} \times [s^\frown 1])$.*

Lemme 2 *De tout plongement $\phi : \mathbb{M} \to \mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ il existe un lifting exact.*

Démonstration : Facile.

□

3 Démonstration

Théorème 5 *Aucun lifting complet n'est exact.*

Démonstration : Soit $\varphi : \mathbb{M} \to \mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ un plongement et ψ un lifting exact de φ. Pour simplifier les notations, on supposera que ψ est une application de $\mathbb{M}$ dans ω^2 et que pour tout $n < \omega$, l'image de $\{n\} \times [\emptyset]$ par ψ est $\{n\} \times \omega$. Soit, pour $n, i < \omega$, $t(n,i)$ l'unique $t \in 2^{i+2}$ tel que $(n,i) \in \psi(\{n\} \times [t])$. Posons, pour $n < \omega$, $U_n = \{n\} \times \bigcup_{i<\omega} [t(n,i)]$; par construction $\mu(U_n) \leq \frac{1}{2}$. Donc $\psi(\{n\} \times U_n^c)$ est infini. Soit $F = \bigcup_{n<\omega} \{n\} \times U_n^c$. Pour tout n, $\{y < \omega / (n,y) \in \psi(F) \cap (\{n\} \times \omega)\}$ est infini… donc non vide ; on note i_n son plus petit élément. Soit $O = \{(n, t(n, i_n))/n < \omega\}$ et $I = \{(n, i_n)/n < \omega\}$. On a

1. $\overline{O} \cap F = \emptyset$, donc $\psi\left(\overline{O}\right) \cap \psi(F)$ est fini.
2. Par construction, $I \subseteq \psi(F)$.
3. Toujours par constructions, $I \subseteq \psi[O]$.

D'où l'on déduit $\psi\left(\overline{O}\right) \neq^* \psi[O]$; pourtant $O \subseteq B_f$, où $f(i) = i + 2$.

□

Définition 10 *Soit $A \subseteq \omega$.*

1. *On note $B_{f,A} = \left\{(n,s) \in B/n \in A \wedge s \in 2^{f(n)}\right\} = (A \times 2^{<\omega}) \cap B_f$.*
2. *On dit qu'un lifting ψ est* complet *sur A si pour tout $f \in {}^\omega\omega$ et tout $O \subseteq B_{f,A}$, $\psi(\overline{O}) =^* \psi[O]$.*

Soit φ un plongement de $\mathbb{M}$ dans $\mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ et Ψ un lifting exact de φ. Le but de cette section est de démontrer que, sous l'hypothèse OCA, il existe un ensemble infini $A \subseteq \omega$ et un lifting ψ de φ exact et complet sur A. Cela démontrera bien le théorème proposé. En effet, une bijection entre A et ω fournirait un plongement $\varphi_A : \mathbb{M} \to \mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ et un lifting ψ_A de φ_A à la fois exact et complet, ce que l'on a vu être contradictoire.

Dans la suite, $\pi : \omega \to 2^{<\omega}$ est une bijection fixée. Pour $x \in 2^\omega$, on note $A_x = \pi^{\leftarrow}(\{x|_n/n < \omega\})$.

$\{A_x/x \in 2^\omega\}$ est une famille presque disjointe de parties de ω de cardinal $2^{\aleph_0}$. Dans la suite, on va montrer (sous l'hypothèse OCA) que pour tous les A_x sauf un nombre dénombrable, il existe un lifting de φ exact et complet sur A_x. On choisit arbitrairement une sous-famille $\mathcal{A}$ de $\{A_x/x \in 2^\omega\}$ de cardinal $\aleph_1$ que l'on énumère par $\{A_\alpha/\alpha < \omega_1\}$. Conséquence immédiate de sa définition, $\mathcal{A}$ est nette.

3.1 Familles cohérentes

Définition 11 *Soit C un ensemble dénombrable et $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{P}(C)$. Pour chaque élément I de $\mathcal{J}$ on se donne une fonction f_I de domaine I. On dit que la famille des fonctions f_I est* cohérente *si, pour tous I et J dans $\mathcal{J}$, si $I \subseteq J$ alors $f_J|_I =^* f_I$, où $=^*$ est l'égalité presque partout. On dit qu'une famille cohérente* peut être uniformisée *s'il existe une fonction f de domaine $\bigcup \mathcal{J}$ telle que pour tout $I \in \mathcal{J}$, $f|_I =^* f_I$. Dans ce cas une telle fonction f est appelée une* uniformisante *de la famille cohérente.*

Théorème 6 (OCA) *Soit C un ensemble dénombrable. Si $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{P}(C)$ est un $P_{\aleph_1}$-idéal, alors toute famille cohérente de fonctions sur $\mathcal{J}$ à valeurs dans ω peut être uniformisée.*

Démonstration : Soit $(f_a)_{a \in \mathcal{J}}$ une famille cohérente de fonctions à valeurs dans ω. Soit $K_0 \subseteq [\mathcal{J}]^2$ défini par

$$\{a,b\} \in K_0 \iff f_a|_{a\cap b} \neq f_b|_{a \cap b}$$

La topologie sur $\mathcal{J}$ est donnée par l'application $\begin{pmatrix} \mathcal{J} & \to & \mathfrak{P}(C \times \omega) \\ a & \mapsto & \{(x, f_a(x))/x \in a\} \end{pmatrix}$, où $\mathfrak{P}(C \times \omega)$ est muni de la topologie habituelle (celle de $\{0;1\}^{C \times \omega}$). $\mathcal{J}$ est ainsi bien un « ensemble de réels » et K_0 est un ouvert de $[\mathcal{J}]^2$ (c'est à peu près immédiat à vérifier).

Montrons qu'il n'existe pas de partie $A \subseteq \mathcal{J}$ 0-homogène non dénombrable, par l'absurde ; soit $A \subseteq \mathcal{J}$ tel que $|A| = \aleph_1$ et $[A]^2 \subseteq K_0$. Comme $\mathcal{J}$ est un $P_{\aleph_1}$-idéal, on peut choisir $b \in \mathcal{J}$ tel que $\forall a \in A\ a \subseteq^* b$.

Quitte à se restreindre à une partie non dénombrable de A, on peut supposer qu'il existe un ensemble fini $F \subseteq C$ et $f_F : F \to \omega$ tels que pour tout $a \in A$

1. $a \setminus b \subseteq F$
2. $\{x \in a \cap b / f_a(x) \neq f_b(x)\} \subseteq F$
3. $f_a|_F \subseteq f_F$

En effet, $\{a \setminus b / a \in A\}$ et $\{\{x \in a \cap b / f_a(x) \neq f_b(x)\} / a \in A\}$ sont en nombre dénombrable, on peut donc supposer que ce sont des singletons, respectivement $\{F_0\}$ et $\{F_1\}$. On pose alors $F = F_0 \cup F_1$. $\{f_a|_F / a \in A\}$ est dénombrable, donc on peut supposer que c'est un singleton $\{f_F\}$.

Alors, pour tout $a, a' \in A$, $f_a|_{a \cap a'} = f_{a'}|_{a \cap a'}$, ce qui contredit $\{a, a'\} \in K_0$.

Donc, d'après OCA, on peut écrire $\mathcal{J}$ sous la forme $\mathcal{J} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{J}_n$, où $\forall n < \omega \; [\mathcal{J}_n]^2 \subseteq K_1$. Comme $\mathcal{J}$ est un $P_{\aleph_1}$-idéal, il existe $n < \omega$ tel que $\forall a \in \mathcal{J} \; \exists b \in \mathcal{J}_n \; a \subseteq^* b$. On définit alors $g : S \to S$ de la manière suivante ; pour $x \in S$, s'il existe $a \in \mathcal{J}_n$ tel que $x \in a$, alors on pose $g(x) = f_a(x)$, sinon on donne à $g(x)$ une valeur quelconque. Comme $[I_n]^2 \subseteq K_1$, il n'y a pas d'ambiguïté. g est alors une uniformisante de $(f_a)_{a \in \mathcal{J}}$.

□

Une conséquence immédiate de ce théorème est que l'on peut se contenter de supposer que $\mathcal{J}$ est une partie de $\mathfrak{P}(C)$ dont l'idéal engendré est un $P_{\aleph_1}$-idéal.

Théorème 7 (OCA) *Soit C un ensemble dénombrable. Si $\mathcal{J}$ est un $P_{\aleph_1}$-idéal de parties de C, alors toute famille cohérente de fonctions sur $\mathcal{J}$ à valeurs dans $\mathfrak{P}(\omega)$ peut être uniformisée.*

Démonstration : Ce théorème est, contrairement aux apparences, une conséquence assez directe du précédent. On suppose, sans perte de généralité, $C = \omega$. Soit $\{f_i / I \in \mathcal{J}\}$ une famille cohérente de fonctions (sur $\mathcal{J}$) à valeurs dans $\mathfrak{P}(\omega)$. Pour $I \in \mathcal{J}$ et $g \in {}^\omega\omega$, on pose $L_{I,g} = \{(n,m) / n \in I, m \leq g(n)\} \subseteq \omega \times \omega$ et $R_{I,g} = \{(n,m) / n \in I, m \leq g(n), m \in f_I(n)\} \subseteq \omega \times \omega$. Soit $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathfrak{P}(\omega \times \omega)$ engendré par les $L_{I,g}$; $\mathcal{J}$ est un $P_{\aleph_1}$-idéal (car $\mathfrak{b} \geq \aleph_2$). Or, si $I, J \in \mathcal{J}$, $I \subseteq J$, $g, h \in {}^\omega\omega$ et $g <^* h$, alors $R_{I,g} =^* R_{J,h} \cap L_{I,g}$. On choisit alors pour chaque $J \in \mathcal{J}$, $I_J \in \mathcal{J}$ et $g_J \in {}^\omega\omega$ tels que $J \subseteq L_{I_J, g_J}$, et on définit F_J comme étant la fonction indicatrice de R_{I_J, g_J}, définie sur J. Alors $\{F_J / J \in \mathcal{J}\}$ est une famille cohérente de fonctions à valeurs dans ω, donc d'après le théorème 6, il existe $R \subseteq \omega \times \omega$ tel que pour tout $I \in \mathcal{J}$ et $g \in {}^\omega\omega$, $R \cap L_{I,g} =^* R_{I,g}$. On définit alors $f : \begin{pmatrix} \omega & \to & \mathfrak{P}(\omega) \\ n & \mapsto & \{m \in \omega / (n,m) \in R\} \end{pmatrix}$.

S'il existe $I \in \mathcal{J}$ tel que $f|_I \neq^* f_I$, cela signifie qu'il existe un nombre infini de $n \in \omega$ pour lesquels il existe un $m_n \in f(n) \Delta f_I(n)$. Mais alors, si l'on pose $g : \begin{pmatrix} \omega & \to & \omega \\ n & \mapsto & m_n \end{pmatrix}$, on a $R \cap L_{I,g} \neq^* R_{I,g}$, ce qui est contradictoire.

□

3.2 Un théorème important

L'objet de cette section est de démontrer ceci.

Théorème 8 (OCA) *Soit $\phi : \mathfrak{P}(\omega) \to \mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ un plongement et $\mathcal{A}$ une famille de parties de ω presque disjointe, nette et de taille $\aleph_1$. Alors pour tous les $A \in \mathcal{A}$ sauf un nombre dénombrable, il existe $D \subseteq \omega$ et une fonction $H : D \to A$ tels que $\forall x \subseteq A \; \phi(x) = [H^{\leftarrow}(x)]$.*

Soit $\varphi : \mathfrak{P}(\omega) \to \mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ un plongement et $\mathcal{A} = \{A_\alpha / \alpha < \omega_1\}$ une famille presque disjointe nette.

Soit $\psi : \mathfrak{P}(\omega) \to \mathfrak{P}(\omega \times \omega)$ et $j : \omega \to \omega \times \omega$ une bijection tels que $\begin{pmatrix} \mathfrak{P}(\omega) & \to & \mathfrak{P}(\omega) \\ A & \mapsto & j^{\leftarrow}(\psi(A)) \end{pmatrix}$ soit un lifting de φ et que pour $n < \omega$, $\psi(\{n\}) = \{n\} \times \omega$.

Si $f \in {}^\omega\omega$, on note L_f l'hypographe (large) de f.

Lemme 3 *Pour tout $a \subseteq \omega$, il existe $f \in {}^\omega\omega$ tel que $\psi(a) \setminus L_f = (a \times \omega) \setminus L_f$.*

Démonstration : Si $n \in a$, $\{n\} \times \omega \subseteq^* \psi(a)$; si $n \notin a$, $\{n\} \times \omega \cap \psi(a) =^* \emptyset$.

□

Pour $f \in {}^\omega\omega$, on définit $\psi_f : \begin{pmatrix} \mathfrak{P}(\omega) & \rightarrow & \mathfrak{P}(L_f) \\ a & \mapsto & \psi(a) \cap L_f \end{pmatrix}$. ψ_f induit un homomorphisme de $\mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ dans $\mathfrak{P}(L_f)/\mathrm{Fin}$, car pour tout $n < \omega$, $\psi_f(\{n\})$ est fini.

Définition 12 *Soit $f \in {}^\omega\omega$ et $A \subseteq \omega$. On dit que ψ_f est* simple *sur A s'il existe $D \subseteq L_f$ et une application $h : D \to A$ telle que pour tout $x \in A$, $h^{\leftarrow}(\{x\})$ soit fini et que pour tout $a \subseteq A$, $\psi_f(a) =^* h^{\leftarrow}(a)$.*

Lemme 4 (OCA) *Pour tout $f \in {}^\omega\omega$, il existe $\beta < \omega_1$ tel que pour tout $\alpha > \omega$, ψ_f soit simple sur A_α.*

On notera α_f le plus petit tel β.

Démonstration : Soit $f \in {}^\omega\omega$. Soit $S = \{(a,b) \in \mathfrak{P}(\omega)^2 / \exists \alpha < \omega_1 \; b \subseteq a \subseteq A_\alpha\}$. La topologie sur S est celle obtenue en identifiant (a,b) à $(a,b,\psi_f(a),\psi_f(b))$. S est donc un sous-espace de $\mathfrak{P}(\omega)^4$. On définit la partition $[S]^2 = K_0 \cup K_1$ par

$$\{(a,b),(c,d)\} \in K_0 \iff \begin{cases} a \text{ et } c \text{ sont des } A_\alpha \text{ distincts} \\ a \cap d = b \cap c \\ \psi_f(a) \cap \psi_f(d) \neq \psi_f(b) \cap \psi_f(c) \end{cases}$$

Le fait que K_0 est ouvert découle de la netteté de $\mathcal{A}$.

Montrons qu'il n'existe pas de partie 0-homogène non dénombrable. Supposons qu'il en existe une, notons-la Y. Soit $d = \bigcup \{b / \exists a \; (a,b) \in Y\}$ et $(a,b) \in Y$. On a

$$\begin{array}{rcl} a \cap d & = & \bigcup \{a \cap b' / \exists a' \; (a',b') \in Y\} \\ & = & \bigcup \{a' \cap b / \exists b' \; (a',b') \in Y\} \\ a \cap d & = & b \end{array}$$

donc $\psi_f(b) \cap \psi_f(a) =^* \psi_f(b)$. D'après le lemme du Δ-système, il existe $Z \subseteq Y$ de cardinal non dénombrable et $n < \omega$ tels que pour tout $(a,b) \in Z$, $(\psi_f(d) \cap \psi_f(a)) \, \Delta \psi_f(b) \subseteq n$. Il existe (a,b) et (a',b') dans Z distincts tels que $\psi_f(a) \cap n = \psi_f(a') \cap n$ et $\psi_f(b) \cap n = \psi_f(b') \cap n$. Mais alors $\psi_f(a) \cap \psi_f(b') = \psi_f(a') \cap \psi_f(b)$, donc $\{(a,b),(a',b')\} \in K_1$, ce qui est évidemment contradictoire.

D'après OCA, on a donc $S = \bigcup_{n<\omega} S_n$, où les S_n est 1-homogène. Pour chaque $n < \omega$, on fixe $D_n \subseteq S_n$, dénombrable et dense dans S_n (au sens de la topologie énoncée plus haut). Pour chaque $(a,b) \in S$, on choisit $\sigma(a) \in \mathcal{A}$ tel que $b \subseteq a \subseteq \sigma(a)$; on pose $\mathcal{B} = \{\sigma(a) / \exists b \in \mathfrak{P}(\omega) \; \exists n < \omega \; (a,b) \in D_n\}$. Soit $c \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ étant bien entendu dénombrable, il suffit de montrer que ψ_f est simple sur tout c.

Pour ce faire, on commence par définir $(n_i)_{i<\omega}$ par récurrence de la façon suivante. D'abord $n_0 = 0$. Supposons $(n_i)_{i \leq k}$ bien défini. Alors n_{k+1} est choisi suffisamment grand pour que, pour tous $x, y, u, v \subseteq n_k$ et tout $i \leq k$, s'il existe $(a,b) \in S_i$ tel que $a \cap n_k = x \wedge b \cap n_k = y \wedge \psi_f(a) \cap n_k = u \wedge \psi_f(b) \cap n_k = v$, alors il existe $(a,b) \in D_i$ vérifiant les mêmes propriétés, avec la condition supplémentaire que $a \cap c \subseteq n_{k+1}$. Cela est toujours possible, puisque quand il existe b tel que $(a,b) \in D_i$, a est presque disjoint de c (puisque $\mathcal{A}$ est nette).

On pose $c_0 = \bigcup \{c \cap (n_{k+1} \setminus n_k) / k \text{ pair}\}$ et $c_1 = c \setminus c_0$; puis on définit, pour tout $n < \omega$,

$$F_n : \begin{pmatrix} \mathfrak{P}(c_0) & \rightarrow & \mathfrak{P}(L_f) \\ b & \mapsto & \bigcup \{\psi_f(c_0) \cap \psi_f(b') / (a',b') \in D_n \wedge a' \cap b = c_0 \cap b'\} \end{pmatrix}$$

Les F_n sont des applications boréliennes et $\forall n < \omega \; \forall b \in \mathfrak{P}(\omega) \; ((c_0, b) \in S_n \Rightarrow F_n(b) =^* \psi_f(b))$. On en déduit que $\psi_f|_{\mathfrak{P}(c)}$ est réunion d'un nombre dénombrable de fonctions booléennes.

On peut ainsi conclure, grâce à la proposition 5.2 de [4], qui est une généralisation du théorème 1.2 de [11].

□

Lemme 5 *Si $f \leq^* g$, alors $\alpha_f \leq \alpha_g$.*

Démonstration : Soit $\alpha \geq \alpha_g$. Soit $D \subseteq L_g$ et $h : D \to A_\alpha$ telle que pour tout $x \in A_\alpha$, $h^{\leftarrow}(x)$ soit fini et que pour tout $a \subseteq A_\alpha$, $\psi_g(a) =^* h^{\leftarrow}(a)$. On pose $D' = D \cap L_f$ et $h' = h|_{D'}$. Pour tout $a \subseteq A_\alpha$, $\psi_f(a) = \psi(a) \cap L_f =^* \psi(a) \cap L_f \cap L_g = \psi_g \cap L_f =^* h^{\leftarrow}(a) \cap L_f = h'^{\leftarrow}(a)$.

□

Donc, sous l'hypothèse OCA, $\alpha_\infty = \sup\{\alpha_f / f \in {}^\omega\omega\} < \omega_1$. On fixe maintenant $\alpha \leq a_\infty$ et on pose $A = A_\alpha$. Pour chaque $f \in {}^\omega\omega$, on fixe $D_f \subseteq L_f$ et $h_f : D_f \to A$ témoignant du fait que ψ_f est simple sur A.

Lemme 6 *Si $f \leq^* g$, alors $D_f =^* D_g \cap L_f$ et $h_g|_{D_f} =^* h_f$.*

Démonstration : En ce qui concerne la première égalité, $D_g =^* \psi_g(A)$ et $D_f =^* \psi_f(A)$, donc $D_g \cap L_f =^* \psi_g(A) \cap L_f =^* \psi_f(A) =^* D_f$. Pour la seconde égalité, raisonnons par l'absurde. $h_g|_{D_f} \neq^* h_f$ signifie, puisque $D_g \setminus D_f$ est fini, qu'il existe $x \in [D_f \cap D_g]^\omega$ tel que $\forall i \in x\ h_f(i) \neq h_g(i)$. On construit $(i_n)_{n<\omega}$, une suite d'éléments de x, par récurrence. Supposons construits $i_0, i_1, , \ldots, , i_{n-1}$ deux à deux distincts vérifiant $\forall j, k < n\ h_f(i_j) \neq h_g(i_k)$. Soit $X = \{i_0, , \ldots, , i_{n-1}\}$, $Y = h_f^{\rightarrow}(X) \cup h_g^{\rightarrow}(X)$. Y est fini, donc $h_f^{\leftarrow}(Y) \cup h_g^{\leftarrow}(Y)$ aussi ; on choisit alors i_n dans son complémentaire. On obtient ainsi un ensemble infini $y = \{i_n / n < \omega\} \in [x]^\omega$ tel que $h_f^{\rightarrow}(y) \cap h_g^{\rightarrow}(y) = \emptyset$.
$y \subseteq h_f^{\leftarrow}\left(h_f^{\rightarrow}(y)\right) \cap h_g^{\leftarrow}\left(h_g^{\rightarrow}(y)\right) \subseteq^* \psi_g\left(h_f^{\rightarrow}(y)\right) \cap \psi_g\left(h_g^{\rightarrow}(y)\right) =^* h_g^{\leftarrow}\left(h_f^{\rightarrow}(y)\right) \cap h_g^{\leftarrow}\left(h_g^{\rightarrow}(y)\right) = \emptyset \ldots$ condradiction !

□

On applique le théorème 6 à $C = \omega \times \omega$, $\mathcal{J} = \{L_f / f \in {}^\omega\omega\}$, avec pour famille de fonctions les

$$F_f : \left(\begin{array}{ccc} L_f & \to & C \\ p & \mapsto & \begin{cases} (1, h_f(p)) & \text{si } p \in D_f \\ (0,0) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right)$$

pour $f \in {}^\omega\omega$, puisque d'après le lemme précédent, c'est bien une famille cohérente. On obtient ainsi une fonction uniformisante $F : \omega \times \omega \to 2 \times \omega$. On pose $D = \{p \in \omega \times \omega / \exists n \in \omega\ F(p) = (1, n)\}$ et H la fonction « seconde coordonnée » de F, définie sur D.

Lemme 7 *L'ensemble des $m \in A$ tel que $\{n \in A / \exists p \in \omega\ (m,p) \in D \wedge H(m,p) = n\}$ soit infini est fini.*

Démonstration : Notons, pour $m \in A$, $I_m = \{n \in A / \exists p \in \omega\ (m,p) \in D \wedge H(m,p) = n\}$, et b l'ensemble des $m \in A$ tels que I_m soit infini. On rétrécit b jusqu'à ce que pour tout $m \in b$, $I_m \setminus b$ soit infini. En accord avec le lemme 3, on choisit $f \in {}^\omega\omega$ tel que $\psi(b) \setminus L_f = (b \times \omega) \setminus L_f$ et $\psi(A \setminus b) \setminus L_f = ((A \setminus b) \times \omega) \setminus L_f$.

Comme les $H^{\leftarrow}(\{n\})$ sont deux à deux disjoints, il existe une fonction de choix $m \mapsto n_m$ pour la famille $\{I_m \setminus b / m \in b\}$ telle que pour tout m, $H^{\leftarrow}(\{n_m\}) \cap V_m \setminus L_f \neq \emptyset$. Soit $g > f$ telle que pour tout m, $H^{\leftarrow}(\{n_m\}) \cap V_m \cap (L_g \setminus L_f) \neq \emptyset$. Alors $H^o t(b) \cap (L_g \setminus L_f) \cap ((A \setminus b) \times \omega)$ est infini. Mais $H^{\leftarrow}(b) \cap (L_g \setminus L_f)$ est presque égal à $\bigcup_{m \in b} (\{m\} \times]f(m); g(m)])$, qui est disjoint de $(A \setminus b) \times \omega$.

□

Lemme 8 *Pour tout $n \in A$, $\{m \in A / \exists p \in \omega\ (m,p) \in D \wedge H(m,p) = n\}$ est fini.*

Démonstration : Soit $f \in {}^\omega\omega$ telle que, pour tous $n, m \in A$, s'il existe $p \in \omega$ tel que $H(m,p) = n$, alors il existe $p \leq f(m)$ tel que $H(m,p) = n$. Soit $n \in A$. On veut prouver que $H^{\leftarrow}(\{n\}) \cap L_f$ est fini. Mais par construction $H|_{L_f} =^* h_f$, donc $H^{\leftarrow}(\{n\}) \cap L_f =^* h_f^{\leftarrow}(\{n\})$, qui est fini.

□

Lemme 9 *Il n'existe qu'un nombre fini de paires $(n,m) \in \omega \times \omega$ telles que $H^{\leftarrow}(\{n\}) \cap (\{m\} \times \omega)$ soit fini.*

Démonstration : Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un nombre infini de telles paires (n,m). On peut alors choisir $(n_i)_{i<\omega}, (m_i)_{i<\omega} \in A^\omega$ vérifiant $\forall i < \omega\ n_i, m_i \leq n_{i+1}, m_{i+1}$, tels que pour tout $i < \omega$, $H^{\leftarrow}\{n_i\} \cap (\{m_i\} \times \omega)$ soit infini. Si l'on note $b = \{n_i / i \in \omega\}$ et $c = \{m_i / i \in \omega\}$, d'après le lemme 3, il existe $f \in \omega^\omega$ tel que $\psi(b) \setminus L_f = (b \times \omega) \setminus L_f$ et $\psi(c) \setminus L_f = (c \times \omega) \setminus L_f$. Soit $g > f$ tel que pour tout $i \in \omega$, on ait $H^{\leftarrow}(n_i) \cap (\{m_i\} \times \omega) \cap (L_g \setminus L_f) \neq \emptyset$.

On peut choisir b et c disjoints

Alors $\psi(b) \cap \psi(c) =^* \emptyset$. Pourtant, $h_g^{\leftarrow}(b) \setminus L_f \subseteq^* \psi(b)$, $\bigcup_{m \in c} (\{m\} \times]f(m); g(m)]) \subseteq \psi(c)$ et $\left(h_g^{\leftarrow}(b) \setminus L_f\right) \cap \bigcup_{m \in c} (\{m\} \times]f(m); g(m)])$ est infini : contradiction !

□

Des lemmes 7, 8 et 9 on conclut qu'il existe $N, M \in \omega$, tels que $N \geq M$ et

1. Si $n, m \geq M$ et $n \neq m$, alors il n'existe qu'un nombre fini de $p \in \omega$ tels que $(m,p) \in D$ et $H(m,p) = n$.
2. Si $m \geq M$, alors $\{H(m,p)/p \in \omega \wedge (m,p) \in D\}$ est fini.
3. Si $n < M$ et $m \geq N$, alors $\forall p \in \omega\ \ ((m,p) \in D \Rightarrow H(m,p) \neq n)$.

(Il suffit de choisir M plus grand que les m du lemme 7, puis N.) D'après 1. et 2., on peut poser $h \in {}^\omega\omega$ telle que, pour tout $n, m \geq M$, si $n \neq m$, $H^{\leftarrow}(\{n\}) \cap (\{m\} \times \omega) \subseteq L_h$. Alors, d'après 3., pour tout $n \geq N$, $H^{\leftarrow}(\{n\}) \setminus L_h = (\{n\} \times \omega) \setminus L_h$. Comme d'habitude, on modifie H sur $N \times \omega$ pour avoir $H^{\leftarrow}(\{n\}) = \{n\} \times \omega$ quand $n < N$.

Soit $b \subseteq A$ et $f > h$ tel que $\psi(b) \setminus L_f = (b \times \omega) \setminus L_f$ (f existe, d'après le lemme 3). On a $\psi(b) \setminus L_f = H^{\leftarrow}(b) \setminus L_f$. Notre H modifié vérifie $H|_{L_f} =^* h_f$, donc $\psi(b) \cap L_f =^* h_f^{\leftarrow}(b) =^* H^{\leftarrow}(b) \cap L_f$. On en déduit $\psi(b) =^* H^{\leftarrow}(b)$.

Résumons : on a trouvé $\alpha < \omega_1$ tel que pour tout $\beta \geq \alpha$ il existe $D \subseteq \omega$ et $H : D \to A_\alpha$ tels que $\forall x \subseteq A_\alpha\ \varphi(x) = [H^{\leftarrow}(x)]$. CQFD.

3.3 Suite et Fin

On se sert maintenant du théorème 8 pour terminer la preuve.

Lemme 10 (OCA) *Pour tout $f \in {}^\omega\omega$, il existe $\beta < \omega_1$ tel que pour tout $\alpha \geq \beta$, il existe un lifting $\psi_{f,\alpha}$ de φ vérifiant*

1. Si $O \subseteq B_{f,A_\alpha}$, alors $\psi_{f,\alpha}(\overline{O}) = \psi_{f,\alpha}[O]$.

2. Si $(\{n\} \times [s]) \cap (\{m\} \times [t]) = \emptyset$, alors $\psi_{f,\alpha}(\{n\} \times [s]) \cap \psi_{f,\alpha}(\{m\} \times [t]) = \emptyset$.

Démonstration : Soit $f \in {}^\omega\omega$. On pose $\mathcal{F}_f = \{B_{f,\alpha}/\alpha < \omega_1\}$. Puisque $\mathcal{A}$ est nette, $\mathcal{F}_f$ l'est aussi. On considère le plongement $\begin{pmatrix} \mathfrak{P}(B_f) & \to & \mathfrak{P}(\omega)/\mathrm{Fin} \\ O & \mapsto & \varphi(\overline{O}) \end{pmatrix}$. D'après le théorème 8, il existe $\beta < \omega_1$ tel que pour tout $\alpha \geq \beta$, il existe $D_{f,\alpha} \subseteq \omega$ et une fonction $H_{f,\alpha} : D_{f,\alpha} \to B_{f,\alpha}$ tels que pour toute partie O de B_f, $H_\alpha^{\leftarrow}(O)$ soit un représentant de $\varphi(\overline{O})$. On peut alors définir $\psi_{f,\alpha} : \begin{pmatrix} \mathbb{M} & \to & \mathfrak{P}(\omega) \\ a & \mapsto & \begin{cases} H_{f,\alpha}^{\leftarrow}(O) \text{ si } O \subseteq B_f \text{ et } a = \overline{O} \\ \Psi(a) \text{ sinon} \end{cases} \end{pmatrix}$, qui convient.

□

Étant donné $f \in {}^\omega\omega$, on note α_f le plus petit β qui satisfasse le lemme précédent.

Lemme 11 *Si $f \leq^* g$, alors $\alpha_f \leq \alpha_g$.*

Démonstration : Supposons $f \leq^* g$. Soit $\alpha \geq \alpha_g$ et $m < \omega$ tel que $\forall n \geq m\ f(n) \leq g(n)$.

Pour $O \subseteq B_{f,A_\alpha}$, on note $O_1 = \{(n,s) \in O/n \geq m\}$ et $U_O = \{(n,t) \in B_{g,A_\alpha}/\exists (n,s) \in O_1\ s \subseteq t\}$. (Visuellement, U_O est la projection de O_1 sur B_{g,A_α}.) On choisit un lifting $\psi_{g,\alpha}$, conformément au lemme précédent. On modifie Ψ en Ψ' de telle manière que, pour $n < m$ et $s \in 2^{f(n)}$, si $(\{n\} \times [s]) \cap (\{l\} \times [t]) = \emptyset$, alors $\Psi'(\{n\} \times [s]) \cap \psi_{g,\alpha}(\{l\} \times [t]) = \emptyset$. On définit $\psi_{f,\alpha} : \begin{pmatrix} \mathbb{M} & \to & \mathfrak{P}(\omega) \\ a & \mapsto & \begin{cases} \psi_{g,\alpha}[U_O] \cup \Psi'[O \setminus O_1] \text{ si } O \subseteq B_{f,A_\alpha} \text{ et } a = \overline{O} \\ \Psi(a) \text{ sinon} \end{cases} \end{pmatrix}$. On a $\psi_{f,\alpha}\left(\overline{O_1}\right) = \psi_{g,\alpha}[U_O] = \psi_{f,\alpha}[O_1]$, et donc $\psi_{f,\alpha}\left(\overline{O}\right) = \psi_{f,\alpha}[O]$. Ce $\psi_{f,\alpha}$ témoigne donc que $\alpha \geq \alpha_f$.

□

Ainsi, OCA impliquant $\mathfrak{b} \geq \aleph_2$, il existe d'après OCA un $\alpha_\infty < \omega_1$ tel que pour tout $f \in {}^\omega\omega$, $\alpha_f \leq \alpha_\infty$. Soit $\alpha < \omega_1$ tel que $\alpha \geq \alpha_\infty$; on pose $A = A_\alpha$. On va maintenant construire un lifting ψ de φ exact et complet sur A. À partir de maintenant, pour chaque $f \in {}^\omega\omega$ on choisit un $\psi_{f,\alpha}$ que l'on notera ψ_f. Pour tout $f \in {}^\omega\omega$, on étend ψ_f sur $C_f = \left\{(n,s)/n \in A \wedge s \in 2^{\leq f(n)}\right\}$ de manière à respecter l'exactitude.

Lemme 12 *Si $f \leq^* g$, alors $\psi_g|_{C_f} =^* \psi_f$.*

Entendre par là : pour presque tout $(n,s) \in C_f$, $\psi_g(\{n\} \times [s]) = \psi_f(\{n\} \times [s])$. Si le lemme est énoncé sous cette forme, c'est pour que l'application du théorème 7, qui va suivre, soit plus naturelle.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde ; supposons que, pour tout $i < \omega$, $\psi_f\left(\{n_i\} \times [s_i]\right) \neq \psi_g(\{n_i\} \times [s_i])$, où les (n_i, s_i) sont des points de C_f, les n_i sont deux à deux distincts, et $\forall i < \omega\ f(n_i) \leq g(n_i)$.

Notons $F_i = \psi_f\left(\{n_i\} \times [s_i]\right)$ et $G_i = \psi_g\left(\{n_i\} \times [s_i]\right)$. On sait

1. $\forall i < \omega\ |F_i \Delta G_i| < \omega$
2. $\forall i, j < \omega\, (i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset)$

ce qui permet d'extraire une sous-suite $(i_k)_{k<\omega}$ telle que $k \neq k' \Rightarrow (F_{i_k} \Delta G_{i_k}) \cap \left(F_{i_{k'}} \Delta G_{i_{k'}}\right) = \emptyset$. On supposera pour simplifier que la suite initiale elle-même a cette propriété ; donc $\displaystyle\bigcup_{i<\omega} F_i \Delta \bigcup_{i<\omega} G_i$ est infini.

Soit $O_g = \{(n_i, s) \in B_g / i < \omega \wedge s_i \subseteq s\}$ et $O_f = \{(n_i, s) \in B_f / i < \omega \wedge s_i \subseteq s\}$. On a $\overline{O_f} = \overline{O_g}$, donc $\psi_g(\overline{O_g}) =^* \psi_f(\overline{O_f})$. Mais $\psi_f[O_f] = \displaystyle\bigcup_{i<\omega} F_i \neq^* \bigcup_{i<\omega} G_i = \psi_g[O_g]$; contradiction !

□

Comme, toujours sous l'hypothèse OCA, on a $\mathfrak{b} \geq \aleph_2$, l'idéal engendré par $\{C_f / f \in {}^\omega\omega\}$ est un $P_{\aleph_1}$-idéal sur $A \times 2^{<\omega}$. D'après le théorème 7, il existe donc une application $\psi : A \times 2^{<\omega} \to \mathfrak{P}(\omega)$ telle que $\forall f \in {}^\omega\omega\ \psi|_{C_f} =^* \psi_f$ (au sens énoncé plus haut, c'està-dire que pour presque tout $(n,s) \in C_f$, $\psi(n,s) = \psi_f(\{n\} \times [s])$).

On choisit $m < \omega$ et $\mathcal{F} \subseteq {}^\omega\omega$ une famille non majorée (pour $\leq^*$), dont tous les éléments soient croissants et tels que $\forall f \in \mathcal{F}\left(\left(n \geq m \wedge s \in 2^{f(n)}\right) \Rightarrow \psi(n,s) = \psi_f(\{n\} \times [s])\right)$ et que $\{f(m)/f \in \mathcal{F}\}$ soit infini. Alors ψ est exact sur $(A \setminus m) \times 2^{<\omega}$. On modifie ψ sur $(A \cap m) \times 2^{<\omega}$ de manière à le rendre exact sur $A \times 2^{<\omega}$, et on en fait Φ, défini cette fois sur $\mathbb{M}$, égal à ψ quand c'est possible, exact sur $A \times 2^{<\omega}$, et égal à Ψ ailleurs.

Il reste à prouver que Φ est complet. Soit $f \in {}^\omega\omega$ et $l \geq m$ tels que $\forall n \geq l\ \Phi(\{n\} \times [s]) = \psi_f(\{n\} \times [s])$. Soit $O \subseteq B_f$. On a $\Phi(\overline{O}) =^* \psi_f(\overline{O})$, car Φ et ψ_f sont tous deux des liftings de φ.

Soit $O' = \{(n,s) \in O / n \geq l\}$; on a $\Phi[O'] = \psi_f[O']$. Il reste donc à prouver $\Phi[O''] =^* \psi_f[O'']$, où $O'' = O' \setminus O$. Et là, ouf, ça marche car O'' est fini. On peut donc utiliser le lemme 1 : $\Phi[O''] =^* \Phi\left(\overline{O''}\right)$ et $\psi_f[O''] =^* \psi_f\left(\overline{O''}\right)$; comme $\Phi\left(\overline{O''}\right) =^* \psi_f\left(\overline{O''}\right)$, c'est gagné.

Références

[1] M. Bekkali. *Topics in Set Theory*, volume 1476. Springer, Berlin, 1991.

[2] Keith J. Devlin. The yorkshireman's guide to proper forcing. *Surveys in Set Theory*, 87.

[3] Stevo Todorčević et Boban Veličković. Martin's axiom and partitions. *Compositio Math*, 63 :397–408, 1987.

[4] Alan Dow et Klaas Pieter Hart. ω^* has (almost) no continuous images. *Israel J. Math*, 109 :29–39, 1999.

[5] Alan Dow et Klaas Pieter Hart. The measure algebra does not always embed. *Fundamenta Mathematicæ*, 163 :163–176, 2000.

[6] Kenneth Kunen. *Set Theory : An Introduction to Independence Proofs*, volume 102 of *Studies in logic and the foundations of mathematics.*

[7] Saharon Shelah. *Proper and Improper Forcing.* Perspectives in Mathematical Logic.

[8] Stevo Todorčević. *Partition Problems in Topology*, volume 84 of *Contemporary Mathematics.*

[9] Boban Veličković. Applications of the open colouring axiom. *Set Theory of the Continuum.*

[10] Boban Veličković. Definable automorphisms of $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 96 :130–135, 1986.

[11] Boban Veličković. OCA and automorphisms of $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$. *Topology and its Applications*, 49 :1–13, 1993.